160

Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien (en dimension finie)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'un produit scalaire $\langle \cdot | \cdot \rangle$.

I] Conséquences du caractère euclidien de l'espace

1] Adjoint d'un endomorphisme

[Rom] XXII.2

Lemme 1 : Soit $l \in E^*$

Alors : il existe un unique $a \in E$ tel que pour tout $x \in E$,
$$l(x) = \langle x | a \rangle$$

Théorème 2 : Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, il existe un unique $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$.

Définition 3 : Avec les notations précédentes, on dit que u^* est l'adjoint de u.

Exemple 4 : Pour $u(x) = \lambda x$, on a $u^*(x) = \lambda x$.

2] Propriétés de l'adjoint

[Rom] XXII.2

Théorème 5 : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ base de E et $G = (\langle e_i | e_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq n}$ la matrice de Gram correspondante, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$

Alors :
$$Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = G^{-1} \, {}^tA G$$
De plus, si $\mathcal{B}$ est orthonormée, alors $Mat_{\mathcal{B}}(u^*) = {}^tA$

Corollaire 6 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Alors : $\det(u^*) = \det(u)$

Théorème 7 : Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et F sous-espace stable par u.

Alors : (1) $(\lambda u + v)^* = \lambda u^* + v^*$, $(u^*)^* = u$, $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$

(2) Si $u \in GL(E)$, alors $u^* \in GL(E)$ et $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$

(3) $\ker(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$, $\mathrm{Im}(u^*) = (\ker(u))^\perp$ et $rg(u) = rg(u^*)$

(4) $F^\perp$ est stable par u^*

II] Endomorphismes orthogonaux

1] Caractérisation des isométries

[Rom] XXII.3

Définition 8 : Une isométrie (ou application orthogonale) de E est une application $u \in \mathcal{L}(E)$ telle que pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x) | u(y) \rangle = \langle x | y \rangle$. On note $O(E)$.

Exemple 9 : Les seules homothéties $x \mapsto \lambda x$ qui sont des isométries sont id et $-id$.

Théorème 10 : $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie ssi pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$

Contrexemple 11 : L'hypothèse de linéarité est vitale. Soit $e \in E$ tel que $\|e\| = 1$. L'application $u : x \mapsto \|x\| e$ n'est pas linéaire, pas une isométrie mais conserve la norme.

Théorème 12 : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ base orthonormée de E, $u \in \mathcal{L}(E)$

Alors : $u \in O(E)$ ssi $u(\mathcal{B})$ est une base orthonormée de E.

Théorème 13 : Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{i=1}^n$ base orthonormée, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = Mat_{\mathcal{B}}(u)$

Alors : $u \in O(E)$ ssi ${}^tAA = A\,{}^tA = I_n$

2] Propriétés topologiques de $O(E)$ et $GL(E)$

[Rom] XXII.3

Théorème 14 : Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ et $O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$.

Alors : $\det(A) = \pm 1$

Corollaire 15 : Soit $u \in O(E)$.

Alors : $\det(u) = \pm 1$.

Définition 16 : On appelle ensemble des isométries positives $O^+(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = 1\}$ et ensemble des isométries négatives $O^-(E) = \{u \in O(E) \mid \det(u) = -1\}$.

Théorème 17 : $O^+(E)$ (resp. $O_n^+(\mathbb{R})$) est un sous-groupe normal de $O(E)$ (resp. $O_n(\mathbb{R})$) d'indice 2.

[Rom] XXII.3

Théorème 18 : Les composantes connexes de $O(E)$ sont $O^+(E)$ et $O^-(E)$.

3) Réduction dans $O(E)$.

[Rom] XXII.4

Lemme 19 : Pour tout $u \in O(E)$, $\mathrm{Spec}(u) \subseteq \{\pm 1\}$.

Lemme 20 : Soit $u \in O(E)$.
Alors : il existe $P_1; \dots; P_r$ sous-espaces vectoriels de E de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u tels que :
$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i$$

Théorème 21 : Soit $u \in O(E)$ pour $n = \dim(E) \geq 2$.
Alors : il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que :
$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} I_p & & & & (0) \\ & -I_q & & & \\ & & R_1 & & \\ & & & \ddots & \\ (0) & & & & R_r \end{pmatrix} \text{ avec } R_k = \begin{pmatrix} \cos(\theta_k) & -\sin(\theta_k) \\ \sin(\theta_k) & \cos(\theta_k) \end{pmatrix}$$
avec $\theta_k \in]0; 2\pi[\setminus \{\pi\}$ et $p + q + 2r = n$.

III) Projections, symétries orthogonales et quaternions

1) Projections orthogonales

[Rom] XXII.1

Théorème 22 : (de la projection orthogonale) Soit F sous-espace vectoriel de E.
Alors : pour tout $x \in E$, il existe une unique $y =: p_F(x) \in F$ tel que
$$\|x - y\| = d(x; F) = \inf_{z \in F} \|x - z\|$$
De plus, $p_F(x)$ est l'unique vecteur de F tel que $x - y \in F^\perp$.

Définition 23 : On dit que $p_F(x)$ est la projection orthogonale de x sur F.

Corollaire 24 : Dans ce cas, si $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ est une base orthonormée de F
Alors : pour tout $x \in E$, $p_F(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x | e_k \rangle e_k$

2) Symétries orthogonales

[Rom] XXII.5

On considère par la suite F sous-espace vectoriel de E.

Définition 25 : La symétrie orthogonale par rapport à F est l'application telle que pour tout $x \in E$, $s_F(x) = p_F(x) - p_{F^\perp}(x)$

Remarque 26 : Puisque $p_F + p_{F^\perp} = id$, on a également : pour tout $x \in E$, $s_F(x) = 2p_F(x) - x = x - 2p_{F^\perp}(x)$

Exemple 27 : (1) Si $D = \mathbb{R}a$, alors $s_D(x) = 2p_D(x) - x = 2\frac{\langle x|a \rangle}{\|a\|^2} a - x$
(2) Si $H = D^\perp$, alors $s_H(x) = 2p_H(x) - x = x - 2\frac{\langle x|a \rangle}{\|a\|^2} a$

Définition 28 : On dit que s_F est une réflexion si : $\dim(F^\perp) = 1$, un renversement si $\dim(F^\perp) = 2$ et un retournement si $\dim(F^\perp) = n - 1$.

Théorème 29 : Pour $n = \dim(E) \geq 2$, $O(E)$ est engendré par les réflexions.

Théorème 30 : $O^+(\mathbb{R}^3)$ est engendré par les retournements

3) Une représentation de $O^+(\mathbb{R}^3)$ par les quaternions

[Tau]

Définition 31 : Le corps gauche des quaternions $\mathbb{H}$ est une $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par i, j, k telle que $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ et $ij = k$; $jk = i$; $ki = j$. La norme d'un quaternion $q = a + ib + jc + kd$ est : $N(q) = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Propriétés 32 : Soit $q, q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ et $Sp(1) = \{q \in \mathbb{H} \mid N(q) = 1\}$.
Alors : (1) $2\mathrm{Re}(q) = q + \bar{q}$ et $\overline{q_1 q_2} = \bar{q_2}\, \bar{q_1}$
(2) $N(q)^2 = q\bar{q}$
(3) $Z(\mathbb{H}) = \mathbb{R}$ et $Z(\mathbb{H}) \cap Sp(1) = \{\pm 1\}$.

Lemme 33 : La sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ de $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs. En particulier, $Sp(1)$ est connexe par arcs.

Théorème 34 : $O^+(\mathbb{R}^3)$ est isomorphe à $Sp(1)/_{\{\pm 1\}}$.

IV] Endomorphismes symétriques et réduction normale

1] Endomorphismes auto-adjoints

[Rom] XXII.6

Définition 35 : Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est dit symétrique ou auto-adjoint si $u^* = u$ i.e. pour tout $x, y \in E$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u(y) \rangle$.

Exemple 36 : Les dilatations sont des endomorphismes symétriques.

Théorème 37 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors : $u \in S(E)$ ssi pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, $Mat_{\mathcal{B}}(u) \in S_n(\mathbb{R})$

Corollaire 38 : $S(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$.

2] Orthodiagonalisation dans S(E)

[Rom] XXII.7

Lemme 39 : Pour tout $u \in S(E)$, $Spec(u) \subseteq \mathbb{R}$

Lemme 40 : Soit $u \in S(E)$, $\lambda, \mu \in Spec(u)$ distinctes.
Alors : $E_\lambda := ker(u - \lambda id)$ et $E_\mu = ker(u - \mu id)$ sont orthogonaux.

Lemme 41 : Soit $n = dim(E) \geq 2$, $u \in S(E)$, $\lambda_1 \in Spec(u)$ et $e_1 \in E_{\lambda_1}$ vp associé à λ_1 de norme 1.
Alors : l'hyperplan $H = (\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u et $u_{|H} \in S(H)$

Théorème 42 : (spectral) Tout $u \in S(E)$ se diagonalise dans une base orthonormée.

Théorème 43 : (diagonalisation simultanée) Soit $(u_i)_{i \in I} \in S(E)^I$
Alors : il existe une base orthonormée commune de diagonalisation dans E pour (u_i) ssi pour tout i, j $u_i \circ u_j = u_j \circ u_i$.

3] Réduction des endomorphismes normaux

[Rom] XXII.10

Définition 44 : On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme normal si $u^* \circ u = u \circ u^*$.

Exemple 45 : $S(E), A(E), O(E)$ sont des ensembles d'endomorphismes normaux.

XXII.10

Lemme 45 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal et F sous-espace vectoriel de E stable par u.
Alors : $F^\perp$ est stable par u

Lemme 46 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors : il existe un sous-espace vectoriel P de E de dimension 1 ou 2 stable par u.

[Rom]

Lemme 47 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.
Alors : il existe $P_1, \dots, P_r$ de sous-espaces vectoriels de E, de dimension 1 ou 2, deux à deux orthogonaux, stables par u tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{r} P_i$

Théorème 48 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ normal.
Alors : il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E telle que : $Mat_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & (0) \\ & R_1 & \\ (0) & & \ddots & \\ & & & R_r \end{pmatrix}$ avec D_p diagonale, $R_k = \begin{pmatrix} a_k & -b_k \\ b_k & a_k \end{pmatrix}$ et $a_k \neq 0$ tels que $p + 2r = n$.

4] Étude de O(p;q)

[H2G2]

Proposition 49 : $exp : S_n(\mathbb{R}) \to S_n^{++}(\mathbb{R})$ est un homéomorphisme

Définition 50 : Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$. On note $O(p;q)$ le sous-groupe de $GL_{p+q}(\mathbb{R})$ formé des isométries de la forme quadratique
$\mathbb{R}^{p+q} \to \mathbb{R}$
$(x_1, \dots, x_{p+q}) \mapsto x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$
de signature $(p;q)$ dont la matrice dans la base canonique est $I_{(p;q)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & -1 \end{pmatrix}$
i.e. $O(p;q) = \{ M \in GL_{p+q}(\mathbb{R}) \mid M I_{(p;q)} {}^t M = I_{(p;q)} \}$

Théorème 51 : Soit $p, q \in \mathbb{N}^*$.
Alors : $O(p;q)$ et $O_p(\mathbb{R}) \times O_q(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{pq}$ sont homéomorphes.

Références :

[Rom] Mathématiques pour l'agrégation Algèbre et Géométrie – Rombaldi

[Isen] L'oral à l'agrégation de mathématiques – Isenmann

[H2G2] Histoires hédonistes de groupes et géométrie – Caldero